

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ) Γ' Λυκείου  
Μαθηματικά προσανατολισμού**



**47 Ασκήσεις**

1-12-2022

**Ασκησόπολις**

Στέλιος Μιχαήλογλου



## Αντίστροφη συνάρτηση

### Θέμα 20

**23196.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

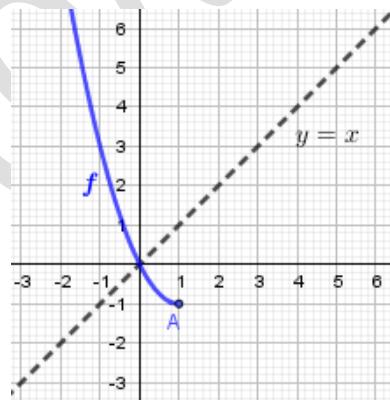
- α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την  $f^{-1}$ .  
Έστω  $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$ ,  $x > -1$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $f^{-1}$ . (Μονάδες 9)

**23198.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ,  $x \geq 0$ .

- α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την  $f^{-1}$ .  
Έστω  $f^{-1}(x) = (x+1)^2$ ,  $x \geq -1$  (Μονάδες 9)
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των  $f$ ,  $f^{-1}$ . (Μονάδες 9)

**23209.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = (x-1)^2 - 1$ ,  $x \leq 1$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 1]$ . (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση  $f^{-1}$  και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της  $f$  και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ . (Μονάδες 8)



**23216.** Έστω συνάρτηση  $f$  γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(3,0)$  και  $B(0,8)$ .

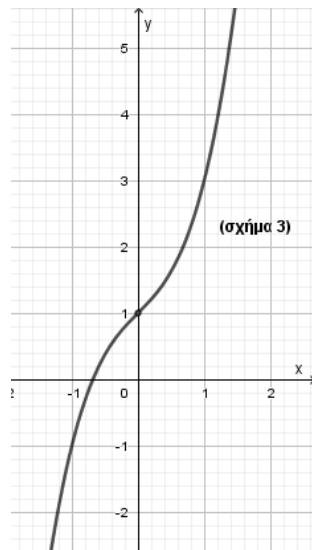
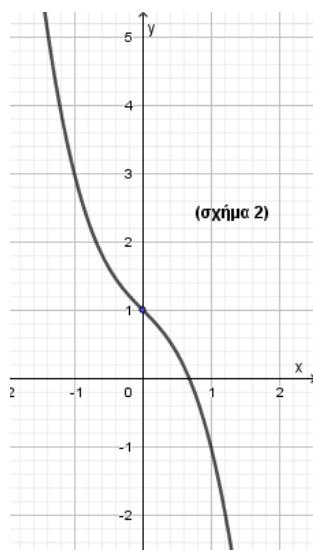
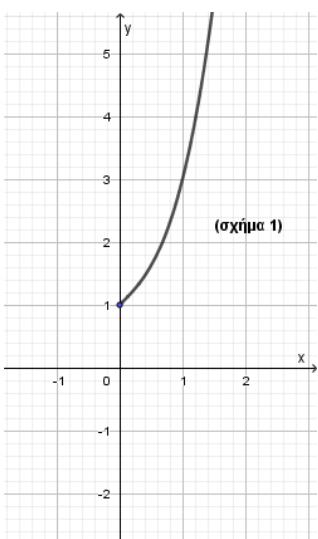
- α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ . (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η  $C_f$  είναι κάτω από τον άξονα  $xx'$  και για ποιες είναι πάνω από τον  $x'x$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(\ln x) > 0$ . (Μονάδες 10)

**24569.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το  $D_f = [0,1]$ . (Μονάδες 05)
- β) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι “1 – 1”.  
ii. Να λύσετε την εξίσωση  $f(f(x)) = 0$ ,  $x \in [0,1]$ . (Μονάδες 10)

**23642.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^3 + x + 1$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)
- β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



γ) i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση  $|f|$ .

(Μονάδες 07)  
(Μονάδες 06)

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $|f|$ , να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $|x^3 + x + 1| = 2023$ .

(Μονάδες 05)

**24130.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με τύπο  $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$ ,  $x \geq 1$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι  $1-1$ .

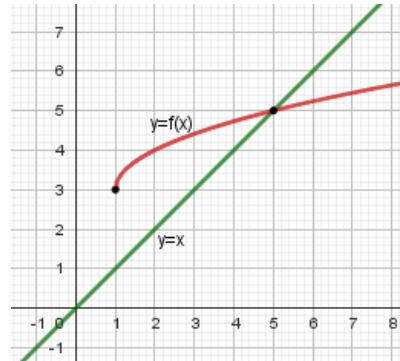
(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της  $f$ .

(Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  καθώς και η διχοτόμος  $y = x$  της γωνίας  $xOy$ . Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$ ,  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 08)



**24703.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{1-x}$  και  $x \in (-\infty, 1]$ .

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 8)

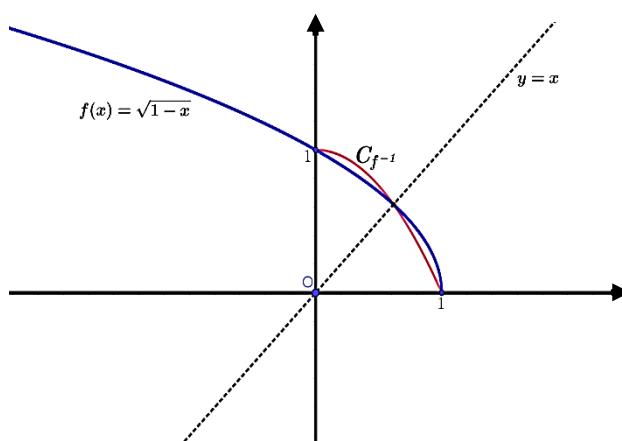
β) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$ .

Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ .

(Μονάδες 7)



**24991.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = -2 \ln x + 1$ ,  $x > 0$ .

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται. (Μονάδες 08)
- b) Να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ . (Μονάδες 09)
- c) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = 1 - \ln x^2$ . Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f = g$ . (Μονάδες 08)

### Θέμα 4ο

**23200.** Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα  $y'$  στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο  $A(1, \ln 2)$ .

- a) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)
- b) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει  $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$ . (Μονάδες 7)
- c) Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$ . (Μονάδες 6)
- d) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση  $g$  δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

### Όριο συνάρτησης στο $x_0$

#### Θέμα 2ο

**24768.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους  $f(x) = x^2 - x + 1$  και  $g(x) = \sqrt{4x - 3}$ .

- a) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) \geq \frac{3}{4}$ . (Μονάδες 6)
- b) Να βρείτε τη συνάρτηση  $h = g \circ f$ . (Μονάδες 9)
- c) Αν  $h(x) = |2x - 1|$  είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$ . (Μονάδες 10)

### Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0$

#### Θέμα 2ο

**23217.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(x - 1)$  και  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ .

- a) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.
  - i.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  (Μονάδες 7)
  - ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  (Μονάδες 8)
- b) Να βρείτε
  - i. το πεδίο ορισμού της  $f \cdot g$  (Μονάδες 4)
  - ii. το  $\lim_{x \rightarrow 1}(f(x) \cdot g(x))$ . (Μονάδες 6)

### Όριο στο άπειρο

#### Θέμα 2ο

**23641.** Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- a) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^2) < f(x)$ . (Μονάδες 08)
- b) Αν  $\alpha^2 < \alpha$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$ . (Μονάδες 09)
- c) Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^x - 1) = f(0)$ . (Μονάδες 08)

**23314.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα  $x'$  σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη – 2. και τον άξονα  $y'$  σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.

a) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       ii)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$       iii)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

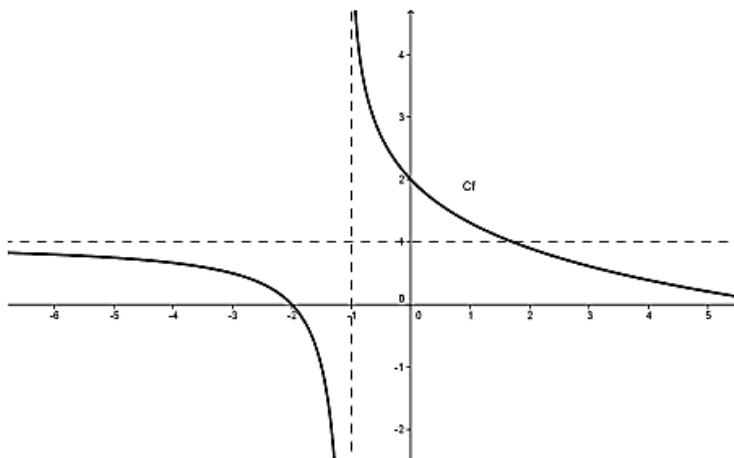
(Μονάδες 12)

b) Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$  (Μονάδες 6)

ii)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$  (Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



## Συνέχεια Συνάρτησης

### Θέμα 20

**24767.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)

b) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ . (Μονάδες 12)

### Θέμα 30

**24761.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ , η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

a) Να δείξετε ότι  $\alpha = 2022$ . (Μονάδες 7)

b) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2022$ . (Μονάδες 10)

## Ορισμός παραγώγου

### Θέμα 20

**24756.** Εστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 0$  και για την οποία ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ .

a) Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = 2$ . (Μονάδες 9)

b) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$ . (Μονάδες 8)

**24757.** Εστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0,1)$

σχηματίζει με τον  $xx'$  γωνία  $45^\circ$ .

a) Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = 1$ . (Μονάδες 8)

- β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0,1)$ . (Μονάδες 8)  
γ) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$ . (Μονάδες 9)

## Κανόνες παραγώγισης

### Θέμα 4o

**23375.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδειχθεί ότι  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . (Μονάδες 06)  
β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το  $\mathbb{R}$ . (Μονάδες 13)  
γ) Να λυθεί η ανίσωση  $f^{-1}(x + f(x)) > x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 06)

### Θέμα 4o

**23106.** Δίνεται η συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$  και η συνεχής συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $[0, \pi]$ , με  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , τέτοιες ώστε:

$$(gof)(x) = |\sin vx|, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

- α) i. Να αποδείξετε ότι  $|f(x)| = |\eta mx|$ . (Μονάδες 06)  
ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . (Μονάδες 03)  
β) Να βρείτε την συνάρτηση  $f$ . (Μονάδες 09)  
γ) Δίνεται η συνάρτηση  $h : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$ , όπου  $f$  είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ . (Μονάδες 07)

## Θεώρημα Μέσης Τιμής

### Θέμα 2o

**24283.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1, 2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2, 5] \end{cases}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής. (Μονάδες 10)  
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0 = 2$ . (Μονάδες 09)  
γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[-1, 5]$ . (Μονάδες 06)

## Σταθερή συνάρτηση

### Θέμα 4o

**23199.** στω  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε  $x > 1$  να ισχύει

$$xf(x)f'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f^2(x) - \ln x$ ,  $x > 1$  είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

(Μονάδες 9)

Έστω  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ,  $x > 1$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(-e, 0)$  και  $B(e, 1)$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο  $B$ . (Μονάδες 8)

**γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 1$  ισχύει  $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$ . (Μονάδες 8)

## Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

### Θέμα 2ο

**23197.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

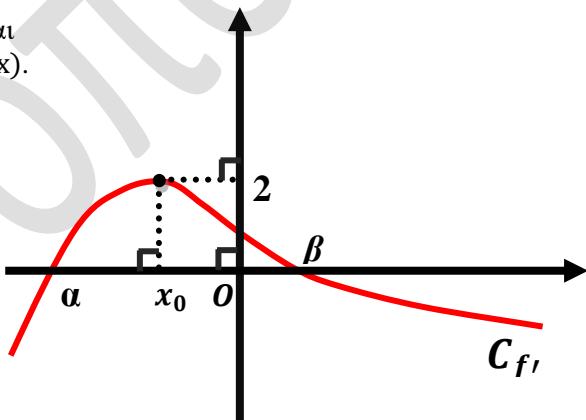
- α)** Να βρείτε δύο διαφορετικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ώστε  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)
- β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)
- γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$ . (Μονάδες 8)

### Θέμα 4ο

**23210.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης  $f'(x)$ .

Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,
- τα  $\alpha, \beta$  είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα  $x$  η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης  $f'(x)$ .
- $f(\alpha) < 0$ ,  $f(\beta) > 0$ .
- η γραφική παράσταση της  $f'(x)$  παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση  $x_0$ .



**α)** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η  $f(x)$ . (Μονάδες 8)

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

**γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $f(x+1) - f(x) \leq 2$ . (Μονάδες 8)

**23311.** Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος  $x$ , τότε:

**α)** Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του  $x$  και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

**β)** Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του  $x$  και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

**γ)** Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους  $u$  που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , όταν  $x = \frac{1}{2}$ . (Μονάδες 07)

**δ)** Αν  $\theta$  η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά  $x$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της  $\theta$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία  $x(t_0) = \frac{1}{2}$ , δεδομένου ότι η πλευρά  $x$  αυξάνεται με σταθερό ρυθμό  $0,1 \text{ m/sec}$ . (Μονάδες 05)

**23376.** Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και
- $g(x) = \ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:  
**a)** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = g \circ f$ . (Μονάδες 07)

**β)** Να αποδείξετε ότι:

- i. η συνάρτηση  $h$  είναι περιττή.
- ii. η συνάρτηση  $h$  είναι “1-1”.

**γ)** Να λυθεί η εξίσωση  $h(x-1) + h\left(\ln \frac{1}{x}\right) = 0$ ,  $x > 0$ . (Μονάδες 08)

**24579.** Δίνεται συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(x) = 2\ln x - x$ .

**a) i.** Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)  
**ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)  
**iii.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

**β)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 07)

**24587.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(x) = 2\ln x - x$  και η ευθεία  $\varepsilon : y = x$ . Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου  $M(x_0, y_0)$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  από την ευθεία  $\varepsilon$ , είναι  $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} |x_0 - \ln x_0|$ .

**a)** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου  $M(x_0, y_0)$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  από την ευθεία  $\varepsilon : y = x$ , είναι  $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2} (x_0 - \ln x_0)$ . (Μονάδες 05)

**β) i.** Να βρείτε το σημείο  $C_f$ , το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία  $\varepsilon$ . (Μονάδες 12)  
**ii.** Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

**γ)** Να βρείτε το σημείο  $C_f$  στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία  $y = x$  και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

## Κυρτότητα – Σημεία καμπής Θέμα 4ο

**23312.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $[-2, 2]$  τέτοια ώστε:  $f$  συνεχής στο  $[-2, 2]$ , δύο φορές

παραγωγίσιμη στο  $(-2, 2)$  και  $f'(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ , για κάθε  $x \in [-2, 2]$ .

**a)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 08)

**β)** Αν  $f(0) = 3$ ,

**i.** Να αποδείξετε ότι  $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$ , για κάθε  $x \in [-2, 2]$  και κατόπιν ότι  $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ ,  $x \in [-2, 2]$ . (Μονάδες 09)

**ii.** Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $f$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \text{συν}x$ .

(Μονάδες 08)

**23531.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x - 3$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$ . (Μονάδες 6)

**β)** Να αποδείξετε ότι η  $f(x)$  παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο  $x_0 \in (0, 1)$  με  $f(x_0) < 0$ . (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$ . (Μονάδες 9)

**24760.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$ ,  $x > 0$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Αν ισχύει  $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$ , να αποδείξετε ότι :

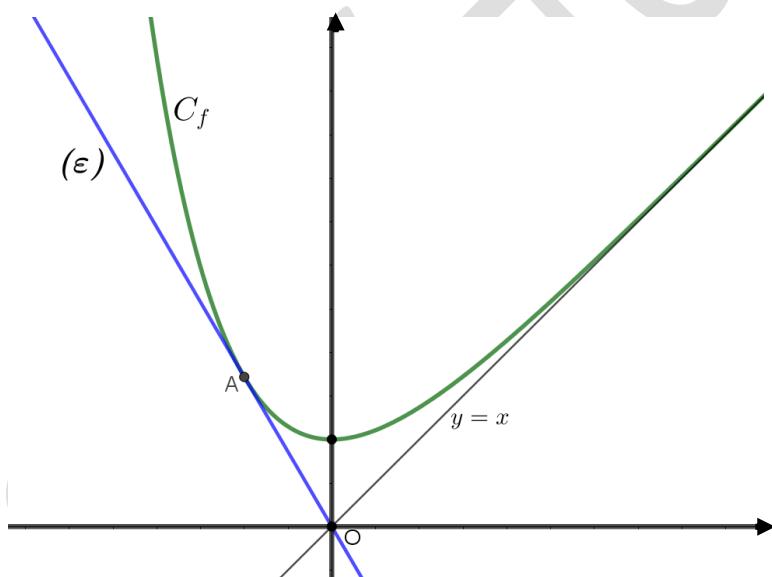
- α) η  $f$  είναι κυρτή. (Μονάδες 6)
- β) υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (1, e)$  με  $f'(x_0) = 0$ . (Μονάδες 6)
- γ) για την  $f'$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο  $[1, e]$ . (Μονάδες 6)
- δ) η  $f$  παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο  $x_0$  που είναι το  $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$ . (Μονάδες 7)

## Κανόνες De L' Hospital

### Θέμα 2o

**23530.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο  $\mathbb{R}$  συνάρτησης  $f(x)$  για την οποία γνωρίζουμε τα εξής :

- στο σημείο  $A(-1, f(-1))$  της γραφικής παράστασης της  $f$  έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία  $(\varepsilon)$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f(x)$  στο  $+\infty$ .



α) Αν γνωρίζουμε ότι  $f(-1) = e - 1$ , να αποδείξετε ότι το  $f'(-1) = 1 - e$  και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$ . (Μονάδες 8)

**24755.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ , η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 0$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι  $f'(0) = 0$ . (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(0, f(0))$ . (Μονάδες 5)

## Θέμα 4o

**24759.** Εστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει  $f(x) \geq x^2 - x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) i. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . (Μονάδες 4)
  - ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)
  - iii. Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq \frac{3}{4}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 5)
- β) Άν επιπλέον  $f(1) = 1$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$  να αποδείξετε ότι:
- i.  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ . (Μονάδες 5)
  - ii. η  $f$  δεν είναι κούλη. (Μονάδες 5)

## Αρχική συνάρτηση

### Θέμα 4o

**24769.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ ,  $x > -1$  και έστω  $F$  αρχική της  $f$  με  $F(1) = \ln 2$ .

- a) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > -1$  ισχύει  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  και να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η  $F$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[0, +\infty)$ . (Μονάδες 6)
- γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $F$  στο  $x_0 = 1$ . (Μονάδες 6)
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$ . (Μονάδες 5)

## Υπολογιστικά ολοκληρώματα

### Θέμα 4o

**23957.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{\ln^2 x}$ ,  $x > 0$ .

- a) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$ . (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)
- γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \cdot f(x) + xe^x}{x(f(x) + e^x)} dx$ . (Μονάδες 10)

**24770.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$ ,  $x > 0$ .

- α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κούλη. (Μονάδες 8)
- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο  $x_0 = \ln 2$ . (Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$ . (Μονάδες 4)

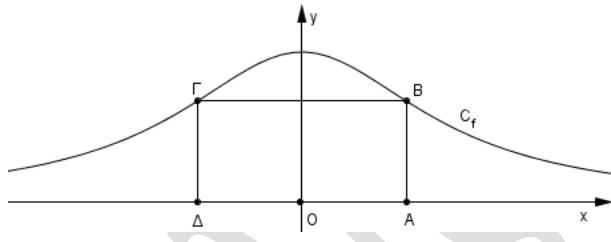
γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1} dx$ . (Μονάδες 8)

**24771.** Εστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση για την οποία ισχύει  $f(0)=1$  και  $(x^2+1)f'(x)+\frac{2x}{x^2+1}=0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί  $C_f$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $y'$  και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $B, G, \Delta$  του ορθογωνίου  $ABG\Delta$  με τη βοήθεια της τετμημένης  $a, a > 0$  του σημείου  $A(a, 0)$ . (Μονάδες 6)



γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E(a)$  του ορθογωνίου  $ABG\Delta$  δίνεται από τον τύπο

$$E(a) = \frac{2a}{a^2 + 1}, \quad a > 0. \quad \text{Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του } a \text{ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.} \quad (\text{Μονάδες 8})$$

δ) Αν  $F$  είναι μια αρχική της  $f$  με  $F(1) = \ln 2$ , να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2}$ . (Μονάδες 6)

## Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

### Θέμα 4ο

**23219.** Εστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει  $f(1) = f'(1) = 2$ .

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $(1, f(1))$  και κατόπιν να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i.  $\int_0^1 f(x) dx > 1$ . (Μονάδες 6)      ii.  $\int_0^1 xf'(x) dx < 1$ . (Μονάδες 6)

**24758.** Εστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση  $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$  για την οποία ισχύει  $g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

α) η  $g$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $x=1$  και για  $x=-1$  και στη συνέχεια ότι  $f(1) = f(-1) = 0$ . (Μονάδες 6)

β)  $f'(1) \geq 0$  και  $f'(-1) \leq 0$ . (Μονάδες 8)

γ) η  $f$  δεν είναι κούλη. (Μονάδες 5)

δ)  $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x) dx \leq 0$ . (Μονάδες 6)

## Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

### Θέμα 40

**23218.** Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η  $P(x)$  παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής  $K$ . (Μονάδες 6)

**β)** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  η  $P(x)$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους. (Μονάδες 6)

**γ)** Έστω ότι  $K(-1, \lambda + 3)$  και ότι η  $P(x)$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις  $x_1, x_2$ , με  $x_1 < -1 < x_2$ .

**i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της  $C_p$  στο σημείο  $K$  και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)

**ii.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E_1$  που περικλείεται μεταξύ των ( $\varepsilon$ ),  $C_p$  και των ευθειών

$x = x_1, x = -1$  είναι ίσο με το εμβαδόν  $E_2$  που περικλείεται μεταξύ των ( $\varepsilon$ ),  $C_p$  και των ευθειών  $x = x_2, x = -1$ . (Μονάδες 8)

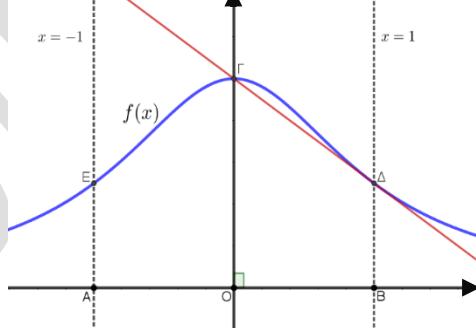
**23955.** Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και οι

ευθείες με εξισώσεις  $x = -1$  και  $x = 1$  οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα  $x'$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της  $f$  στα σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $y'$  στο σημείο  $\Gamma$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)$  στο σημείο  $\Delta$ , είναι η ευθεία  $\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 8)

**β)** Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $[0, 1]$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από την ευθεία  $\Gamma\Delta$ , με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ . (Μονάδες 7)

**γ)** Να αποδείξετε ότι  $\int_{-1}^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$ . (Μονάδες 10)



**24275.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να αποδειχθεί ότι η ευθεία  $y = -x + 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ . (Μονάδες 07)

**β)** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα  $\rho$ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1. (Μονάδες 09)

**γ)** Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό  $E$  του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες  $x = 1$ ,  $x = \rho$  ισούται με  $E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1}$  τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 09)

**24704.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + e^x$ ,  $x > 0$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . (Μονάδες 6)

**β)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο  $A$  τον άξονα  $x'$ , με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ . (Μονάδες 9)

**γ)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 1$ , είναι  $E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$ . (Μονάδες 10)

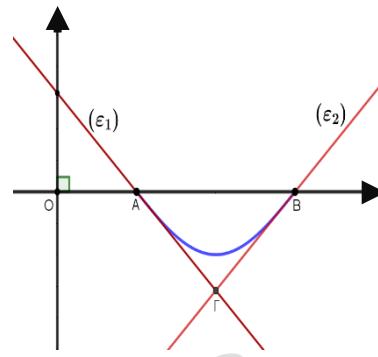
**25235.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , της

οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία  $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$  και  $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$  έχουν σχεδιασθεί

οι εφαπτόμενες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της  $f$ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Gamma$ .

**a)** Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών

$$(\varepsilon_1), (\varepsilon_2) \text{ είναι } (\varepsilon_1): y = -x + \frac{\pi}{2} \text{ και } (\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2} \text{ αντίστοιχα.}$$



(Μονάδες 8)

**b)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$  και τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

**γ)** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$ .

(Μονάδες 8)

**25259.** Δίνεται η παραγωγίσμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της  $f$ , να εφάπτεται της  $\varepsilon : y = \frac{1}{4}$ , στο  $x_0 = 0$ .
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$ .

**a)** Να αποδειχθεί ότι:

i.  $f(0) = \frac{1}{4}$  και  $f'(0) = 0$ . (Μονάδες 06)

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta \mu x \cdot f(x)} = 0$ . (Μονάδες 07)

**b)** Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της  $f$  είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$ . (Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f'$ , τον άξονα  $x'$  και την ευθεία  $x = 1$ . (Μονάδες 06)

**25757.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

**a)** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής. (Μονάδες 09)

**β)** Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $x \in [0, 1]$ , ισχύει  $0 \leq f(x) \leq 1 - x$ . (Μονάδες 07)

**γ)** Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό Ε του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  ισχύει  $E < \frac{1}{2}$  τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)